

## NOTIZEN

## The Elastic Scattering of Electrons by Neutral Atoms and the Existence of Negative Ions

By T. TIETZ

Department of Theoretical Physics, University of Łódź,  
Łódź, Poland

(Z. Naturforsch. **19 a**, 1413—1414 [1964]; eingeg. am 23. September 1963)

It is known that the low elastic scattering of electrons by neutral atoms as well as the formation of negative ions are of great interest in connection with the upper atmosphere as well as astrophysics. In this case only the phase shift  $\eta_0$  for the s-state is of interest<sup>1</sup>. If the scattering potential  $V(r)$  is a continuous function of  $(r)$  and if

$$\int_0^1 r |V(r)| dr + \int_1^\infty r^2 |V(r)| dr < \infty$$

then  $|\eta_0(k=\infty) - \eta_0(k=0)| = m\pi$ ,

where  $m$  is the number of eigenvalues<sup>2</sup>. Studying the behaviour of the phase shift  $\eta_0$  near the zero energy scattering one can get information on the number of bound states for a potential  $V(r)$  satisfying the above mentioned condition. The purpose of this paper is to give an analytical expression for  $\eta_0$ . The author<sup>3</sup> has previously shown that the potential

$$V(r) = -\frac{Z c e^{-c r}}{1 - e^{-c r}} \quad (1)$$

approximates well the HARTREE field.  $Z$  is the atomic number, and  $c$  is a constant depending on  $Z$ . The poten-

tial  $V(r)$  given by the last equation has the advantage that one can solve exactly the SCHRÖDINGER equation for the s-state both for positive and negative energy  $E$ . It has been found that for the constant

$$(c/2) = 1.36 \left( \frac{Z-1}{Z+1} \right) Z^{1/3}$$

one obtains eigenvalues for the 1 s-state

$$\alpha_1 = Z - 1.36 \left( \frac{Z-1}{Z+1} \right) Z^{1/3}$$

which gives good results.

In table I we have a comparison of our  $\alpha_1$  eigenvalues with LATTER's<sup>4</sup> results.

The SCHRÖDINGER equation in atomic units in our case for positive energy is

$$y'' + \left[ k^2 + \frac{2 Z c e^{-c r}}{1 - e^{-c r}} \right] y = 0. \quad (2)$$

We choose solutions of (2) with the asymptotic properties  $f(k, r) \rightarrow e^{-i k r}$  and  $f(-k, r) \rightarrow e^{i k r}$  for  $r \rightarrow \infty$ . Denote  $f(k, 0) = f(k)$  and  $f(-k, 0) = f(-k)$  then

$$y(r) = f(k, r) - \frac{f(k)}{f(-k)} f(-k, r)$$

is a solution of eq. (2) possessing the properties  $y(0) = 0$ , and

$$y(\infty) \rightarrow e^{-i k r} - \frac{f(k)}{f(-k)} e^{i k r}.$$

Simple calculations<sup>3</sup> give us for  $f(k)$  and  $f(-k)$  the following formulas:

$$f(k) = \frac{\Gamma[1 + (2 i k/c)]}{\Gamma[1 + (i k/c) - \sqrt{(2 Z/c) - (k/c)^2}] \Gamma[1 + (i k/c) + \sqrt{(2 Z/c) - (k/c)^2}]},$$

$$f(-k) = \frac{\Gamma[1 - (2 i k/c)]}{\Gamma[1 - (i k/c) - \sqrt{(2 Z/c) - (k/c)^2}] \Gamma[1 - (i k/c) + \sqrt{(2 Z/c) - (k/c)^2}]}, \quad (3)$$

where the symbol  $\Gamma$  denotes EULER's gamma function. The phase shift  $\eta_0$  is given by

$$\exp\{2 i \eta_0(k)\} = f(k)/f(-k)$$

or equivalently by

$$\operatorname{tg} \eta_0(k) = +i \frac{1 - f(k)/f(-k)}{1 + f(k)/f(-k)}. \quad (4)$$

$Z$	8	10	13	19	26	29	37	47	57	65	74	82	92
(a)	6.092	...	10.536	16.022	22.546	25.365	32.939	42.485	51.971	59.800	68.498	76.250	85.965
(b)	5.884	7.603	10.259	15.734	22.269	25.100	32.707	42.297	51.947	59.698	68.443	76.234	85.993
(c)	5.751	7.508	10.198	15.691	22.213	25.036	32.604	42.155	51.759	59.473	68.176	75.928	85.639

Table 1. A comparison of our results (b) for the eigenvalues  $\alpha = (2 E)^{1/3}$  with LATTER's results for  $\alpha$  for THOMAS-FERMI (a) and THOMAS-FERMI-DIRAC potential (c).  $Z$  = Atomic number.

<sup>1</sup> F. B. MALIK and E. TREFFTZ, Z. Naturforschg. **16 a**, 492 [1961].

<sup>2</sup> N. LEVINSON, Kgl. Danske Videnskab. Selskab., Mat.-Fys. Medd. **25**, No. 9 [1949].

<sup>3</sup> T. TIETZ, J. Chem. Phys. **29**, 684 [1958].

<sup>4</sup> R. LATTER, Phys. Rev. **99**, 510 [1955].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Using eq. (3) and the well known relation for  $\Gamma$  we find

$$\frac{f(k)}{f(-k)} = \frac{k}{Z \pi s h \cdot 2 \pi k/c} \cdot \left( c h^2 \frac{\pi k}{c} \sin^2 \pi \sqrt{\frac{2 Z}{c} - \left( \frac{k}{c} \right)^2} \right). \quad (5)$$

If  $f(k)$  has been found for a given  $Z$  and  $c$  then, since

$f(-k) = f^*(k)$ , the last formula allows us to calculate directly  $f(-k)$ . Since the phase shift  $\eta_0(k) = \arg f(k)$  is given we can calculate the total cross section  $\sigma_0 = (4 \pi/k^2)/\sin^2 \eta_0$  for low energy scattering. Our analytical expression for  $\eta_0(k)$  allows us to calculate in a simple manner the phase shifts. For more complicated potentials one can find the phase shift only by some complicated numerical method.

## Zur Energiebestimmung von Protonen aus Reichweitemessungen

Von L. KOSCHMIEDER \*

Physikalisches Institut der Universität Bonn

(Z. Naturforschg. **19 a**, 1414—1416 [1964]; eingeg. am 10. September 1964)

Das Energiespektrum von Protonen kann man experimentell in einfacher Weise durch Messung der integralen Reichweitenkurve in Materie bestimmen. Dazu ist die Kenntnis der Reichweite und des Absorptionsquerschnittes als Funktion der Energie notwendig. Die Reichweite läßt sich mit Hilfe der BETHE-BLOCH-Formel auf den mittleren Energieverlust zurückführen, in den als einzige empirische Konstante die mittlere Ionisierungsenergie  $I$  eingeht. Der Absorptionsquerschnitt läßt sich bei Energien oberhalb 100 MeV aus dem optischen Modell berechnen. Bei kleineren Energien muß man die experimentellen Werte heranziehen.

Als sehr brauchbarer Absorber hat sich Kupfer erwiesen. Die mittlere Ionisierungsenergie wurde bei Energien unter 100 MeV um 370 eV gefunden<sup>1-3</sup>, während bei Energien oberhalb 300 MeV die Werte um 315 eV liegen<sup>4-6</sup>. In den Reichweitentabellen, z. B. von STERNHEIMER<sup>7</sup>, wird  $I$  als Konstante eingesetzt, wie es von der BETHE-BLOCH-Theorie gefordert wird. Die Änderung von  $I$  mit der Energie ist wahrscheinlich auf eine Unterschätzung der Schaleneffekte zurückzuführen<sup>8</sup>. Der Absorptionsquerschnitt beträgt 0,75 barn bei einer kinetischen Energie größer als 80 MeV. Darunter steigt es auf 1,3 barn bei 20 MeV an und fällt dann unterhalb 10 MeV sehr schnell auf Null ab<sup>9-12</sup>.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit war, zu untersuchen, ob mit diesen Parametern die integrale Reichweitenkurve vollständig beschrieben wird oder ob als Folge von Sekundärprozessen Abweichungen auftreten.

Der  $\gamma$ -Strahl des Bonner 500 MeV-Elektronensynchron-

trons diente zur Photoproduktion von Protonen in einem Graphit-Target (2 cm hoch und in Strahlrichtung 1 cm tief). Die Protonen wurden durch ein  $60^\circ$ -Magnetenspektrometer mit einem Krümmungsradius von 1,42 m nach Impulsen sortiert und durch die Szintillationszähler Z1 und Z3 definiert (Abb. 1). Das Verhältnis der Zählraten  $I/I_0$  ergab den Bruchteil der durchgelassenen Protonen. Von anderen positiven Teilchen wurden die Protonen durch ihre Laufzeit unterschieden. Der Absorber bestand aus Elektrolyt-Kupferplatten  $15 \times 15 \text{ cm}^2$  mit der Dichte  $(8,93 \pm 0,01) \text{ g/cm}^3$ .

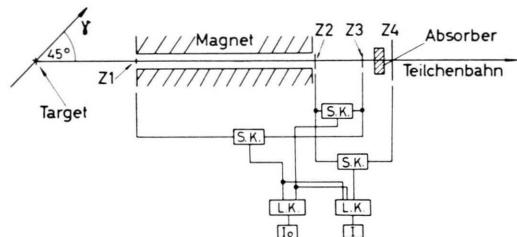


Abb. 1. Versuchsaufbau. Z1 bis Z4 = Szintillationszähler, S.K. = Schnelle Koinzidenz (6 nsec), L.K. = Langsame Koinzidenz (100 nsec).

Die Impulsauflösung des Magneten ist bestimmt durch die vertikale Ausdehnung des  $\gamma$ -Strahles im Target (2 cm) und die radiale Größe der Zähler Z1 (2 cm) und Z3 (3,5 cm). Die Halbwertsbreite betrug

$$\Delta p/p = 0,03.$$

Aus der Impulsverteilungskurve läßt sich die differentielle Reichweitenkurve berechnen. Vielfachstreuung der Protonen im 2 mm dicken Aperturzähler verschlechtert das Impulsauflösungsvermögen. Die differentielle Reichweitenkurve wurde damit korrigiert. Dagegen konnte der Einfluß der Streuung in Z2 vernachlässigt werden.

\* Gegenwärtige Adresse: Cambridge, Mass., Pierce Hall, Harvard University.

<sup>1</sup> H. BICHSSEL, R. F. MOZLEY u. W. A. ARON, Phys. Rev. **105**, 1788 [1957].

<sup>2</sup> V. C. BURKIG u. K. R. MACKENZIE, Phys. Rev. **106**, 848 [1957].

<sup>3</sup> N. BLOEMBERGEN u. P. J. VAN HEERDEN, Phys. Rev. **83**, 561 [1951].

<sup>4</sup> R. MATHER u. E. SEGRÈ, Phys. Rev. **84**, 191 [1951].

<sup>5</sup> V. P. ZRELOV u. G. D. STOLETOV, Soviet Phys.—JETP **9**, 461 [1959].

<sup>6</sup> W. H. BARKAS u. S. VON FRIESEN, Nuovo Cim., Suppl. **19**, 41 [1961].

<sup>7</sup> R. M. STERNHEIMER, Phys. Rev. **115**, 137 [1959].

<sup>8</sup> U. FANO, Ann. Rev. Nucl. Sci. **13**, 1 [1963].

<sup>9</sup> R. F. CARLSON, R. M. EISBERG, R. H. STOKES u. T. H. SHORT, Nucl. Phys. **36**, 511 [1962].

<sup>10</sup> R. GOLOSKIE u. K. STRAUCH, Nucl. Phys. **29**, 474 [1961].

<sup>11</sup> J. M. CASSELS u. J. D. LAWSON, Proc. Phys. Soc., Lond. **67**, 125 [1953].

<sup>12</sup> A. J. KIRSCHBAUM, Univ. of California Radiation Laboratory — UCRL 1967 (nicht veröffentlicht).